

Análisis con aprendizaje automático en el proceso de flotación de burbujas para la obtención de minerales

Nelson Romero-García¹, Sonia Regina Meneses¹, Julio Waissman Vilanova²,
Oscar Mario Rodríguez Elias¹, César Enrique Rose Gómez¹,
Álvaro Rendón Montoya³

¹ Tecnológico Nacional de México,
Instituto Tecnológico de Hermosillo,
México

² Universidad de Sonora,
México

³ ECN Automation,
México

nelsonromero219@gmail.com, julio.waissman@unison.mx,
{sonia.menesesm, omrodriguez}@hermosillo.tecnm.mx,
arendon@ecn.com.mx

Resumen. El análisis de capa superficial de espuma ha sido clave para entender el comportamiento general de los sistemas de flotación de burbujas para la obtención de minerales en la industria minera. En el estado del arte se han desarrollado varios analizadores de capa superficial de espuma de las burbujas en las celdas de flotación con el objetivo de clasificar mejor el proceso, adición de reactivos y control del flujo de aire. El uso de la inteligencia artificial, siendo más específico el aprendizaje automático, en la industria ha tenido un uso creciente y ha demostrado su aplicabilidad y buenos resultados mediante aplicación de técnicas para la clasificación de imágenes. En este artículo se presenta un caso aplicado a la industria minera donde se hace uso de métodos y herramientas de aprendizaje automático para la clasificación de imágenes, con el fin de obtener el modelo que brinde mejores resultados para estimar el estado del proceso a partir de las imágenes tomadas en las celdas de flotación, con lo que se pretende mejorar el proceso, reducir costos, aumentar productividad y calidad en la extracción de minerales.

Palabras clave: Flotación, burbujas, industria minera, celdas, inteligencia artificial, aprendizaje automático, imágenes.

Analysis with Machine Learning in the Bubble Flotation Process to Obtain Minerals

Abstract. The analysis of the surface foam layer has been key to understanding the general behavior of bubble flotation systems for obtaining minerals in the mining industry. In the state of the art, several surface foam layer analyzers of the bubbles in the flotation cells have been developed in order to better classify the process, the addition of reagents and control of airflow. The use of artificial intelligence, machine learning is

more specific, in the industry has had an increasing use and has demonstrated its applicability and good results by applying techniques for image classification. This article presents a case applied to the mining industry where machine learning methods and tools are used to classify images, in order to obtain the model that provides the best results to estimate the state of the flotation process from of the images taken in the flotation cells, with the intention of improving the process, reducing costs, increasing productivity and quality in the extraction of minerals.

Keywords: Flotation, bubbles, mining industry, cells, artificial intelligence, machine learning, images.

1. Introducción

De acuerdo con [16] el sector minero-metalúrgico en México contribuye con el 4% del Producto Interno Bruto (PIB) nacional. México se ubica entre los 10 principales productores de 16 diferentes minerales en el mundo, es el 1er destino en inversión en exploración minera en América Latina y el 4to en el mundo; y es el 5to país con el mejor ambiente para hacer negocios mineros.

Sonora ha sido considerado tradicionalmente como un Estado minero de gran importancia [17], siendo así que el desarrollo e implementación de nuevas tecnologías resulta de gran importancia para la mejora de los procesos de obtención de minerales. La modernización de la industria minera a nivel mundial se encuentra en pleno desarrollo y la industria de minera mexicana debe mantenerse cerca de este desarrollo.

La investigaciones y desarrollos en el campo de la inteligencia artificial haciendo uso de la visión artificial en sistemas de flotación de burbujas, cubre la necesidad de obtener resultados más eficientes para el análisis de las mismas. Este proceso de análisis es un problema mal definido puesto que en cada mina se realiza mediante la observación de un operador de planta que valora el comportamiento de las burbujas y determina la calidad del proceso, por lo que la caracterización del proceso de flotación de burbujas no es exacta y por tanto las pérdidas en la obtención del mineral es un problema que afecta a la industria.

La visión artificial puede extraer con precisión y rapidez las características de las burbujas, tanto físicas como dinámicas, a través de imágenes digitales y presentar estos resultados a los operadores y / o utilizar los resultados como entradas para el control del proceso.

La comprensión de estos procesos de flotación ha sido durante mucho tiempo clave para entender el comportamiento general de los sistemas de flotación [10], [11]. Buscando resolver esta problemática, se han desarrollado analizadores de la burbuja derramada en las celdas de flotación, buscando mejorar el control de nivel, la adición de reactivos y el control de flujo de aire.

Los objetivos principales de control de las celdas de flotación son los factores metalúrgicos, es decir, recuperación y el grado de concentración del mineral. La estimación y medición de estas variables generalmente requieren instrumentos sofisticados que son caros de comprar y mantener [8]. Estudios anteriores demuestran que las características visuales de la espuma reflejan cambios en las condiciones del proceso y pueden usarse para predecir los factores metalúrgicos y el grado de recuperación del mineral [5, 6].

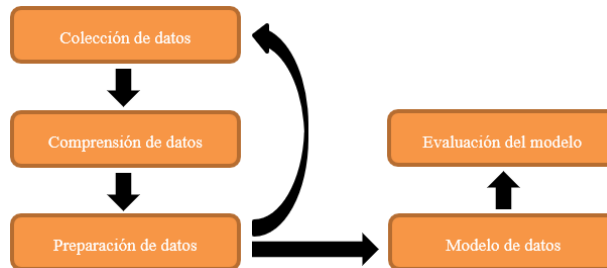


Fig. 1. Metodología de trabajo.

Las características de la capa superficial de espuma formada por las burbujas más importantes incluyen el tamaño de burbuja, el color de la espuma, la velocidad de la espuma y la velocidad de colapso de la burbuja. Varios algoritmos de procesamiento de imágenes eficientes fueron desarrollados para cuantificar estas características. La distribución del tamaño y el color son variables estáticas que se calculan a partir de una sola imagen, mientras que la velocidad de la espuma y la velocidad de colapso de la burbuja son variables dinámicas que se calculan a partir de un par de imágenes.

Para la medición del tamaño de burbuja se han desarrollado varias técnicas las cuales incluyen, la segmentación [7, 8], análisis de textura [7], enfoque de espectro de textura modificado [6] y uso de información morfológica interfacial [20]. En la práctica, cada uno de estos métodos tiene sus respectivas ventajas y desventajas.

El presente trabajo se plantea dada la necesidad de reducir pérdidas minerales y económicas, facilitar la caracterización de burbujas en el proceso de flotación y proveer un análisis de los métodos y herramientas de aprendizaje automático (ML) que se pueden utilizar para resolver un problema como el planteado, mediante imágenes tomadas en las celdas de flotación. Se muestra cómo se pueden tratar las imágenes para resolver problemas de clasificación de burbujas en celdas de flotación e implementar modelos de aprendizaje automático, donde las máquinas de soporte vectorial pueden producir mejores resultados.

Además, al trabajar en la optimización de estos modelos para identificar los diferentes estados de la capa superficial de espuma generada en las celdas de flotación, podría mejorarse aún más por un margen considerable. El resultado final de esto es que es posible realizar estimaciones marcadamente más confiables para la clasificación de burbujas.

2. Metodología

Con demasiada frecuencia existe la tendencia de pasar por alto la metodología y saltar directamente a resolver un problema con ML. Sin embargo, hacerlo de esta manera no se establece una base sólida y no es posible asegurar criterios de calidad para que el proceso de ML pueda ser integrado en un proceso productivo. Por tanto, seguir una metodología más a menudo nos acerca al problema que estábamos tratando de resolver.

A continuación, se muestra la metodología seguida para el desarrollo del presente trabajo (véase Fig. 1).

3. Exploración de datos

Las técnicas de ML han tenido en una amplia gama de aplicaciones, como visión por computadora, procesamiento del habla, comprensión del lenguaje natural, neurociencia, salud e internet de las cosas; dado que en la era de los grandes datos el ML ha despertado amplios intereses. Por una parte, los grandes datos proporcionan información sin precedentes para algoritmos de ML para extraer patrones subyacentes y construir modelos predictivos; por otra parte, los algoritmos tradicionales de ML enfrentan desafíos como la escalabilidad para liberar realmente el significado de los grandes datos.

3.1. Colección de datos

Los datos de imagen de las burbujas fueron tomadas en una celda de flotación de una planta minera de Sonora mediante el uso de cámaras Giga Ethernet (GigE) con un lente de 16mm. Durante el período de toma de las imágenes, se hizo variación sobre la adición de reactivos y el control de flujo de aire para obtener diferentes tipos de burbujas.

Las imágenes de 499 x 499 píxeles se asociaron con tres diferentes clasificaciones de burbujas según la clasificación de los operadores, burbuja pequeña (clase 1), burbuja mediana (clase 2) y burbuja grande (clase 3) (véase Fig. 2). Estas clases fueron esencialmente distinguidas por el tamaño de la burbuja en el banco de flotación. Un total de 553 imágenes en los datos fue lo obtenido al final del proceso.

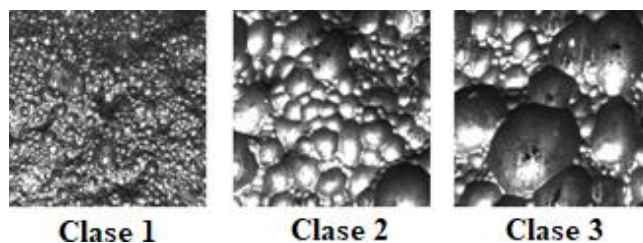


Fig. 2. Imágenes muestras de cada una de las clases de capa superficial de espuma.

Como se indica en el parte inferior de la Fig. 2, cada clase de burbuja está asociada con un valor, es decir, Clase 1 burbuja pequeña compuesta por 200 imágenes, Clase 2 burbuja mediana compuesta por 141 imágenes y Clase 3 burbuja grande compuesta por 212 imágenes. El conjunto de datos de entrenamiento consistió en 75% de las imágenes seleccionadas al azar, mientras que el resto sirvió como datos de prueba para validar el modelo.

3.2. Coincidencia de histogramas

La coincidencia de histogramas [1] manipula los píxeles de una imagen fuente con una imagen de referencia, haciendo uso del histograma de colores de ambas imágenes. El número de canales de colores entre la imagen fuente y la imagen de referencia deben

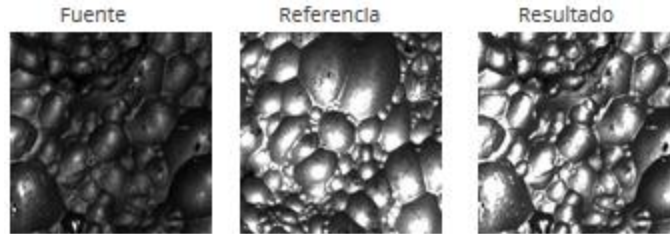


Fig. 3. Imagen resultada de aplicar la normalización de colores sobre la imagen fuente.

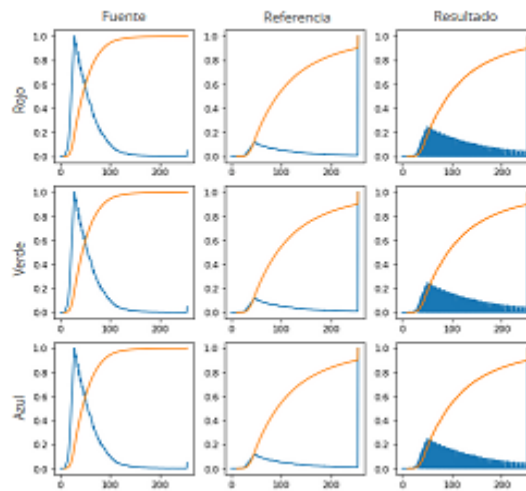


Fig. 4. Histogramas de colores trazado por cada canal RGB.

ser igual en todo momento, por tanto, la coincidencia se realiza de forma independiente por cada canal. A continuación, se muestra el resultado de esta normalización ligera de colores (véase Fig. 3) y el histograma de colores trazado por cada canal RGB, donde se observa como la imagen coincidente tiene el mismo histograma acumulativo que la imagen de referencia (véase Fig. 4).

3.3. Reagrupamiento de atributos usando PCA

El análisis de componentes principales (PCA, por sus siglas en inglés) es una de las principales técnicas para la reducción de dimensionalidad en un conjunto de datos mientras que conserva la mayor parte de la información [18]. Se utiliza para conocer cómo están correlacionados los datos y proporciona un número mínimo de variables que mantengan la máxima cantidad de variación o información sobre cómo se distribuyen los datos originales.

Aplicando PCA a nuestro conjunto de datos y graficando las dos primeras variables que más explican la distribución de los datos, se obtuvo el siguiente resultado (véase Fig. 5).

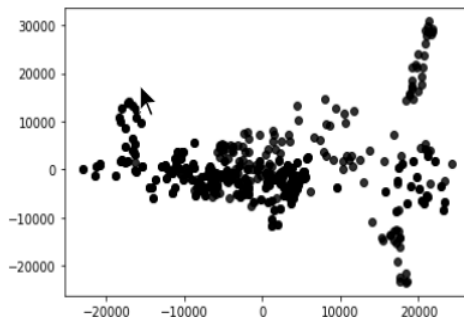


Fig. 5. PCA sobre las dos primeras variables.

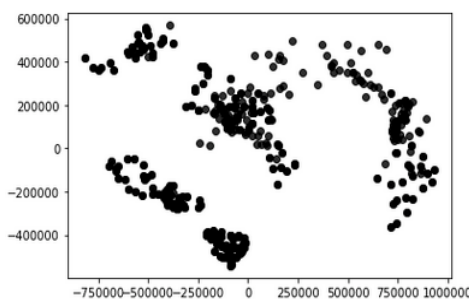


Fig. 6. PCA sobre las dos primeras variables usando la transformada de Fourier.

Con este resultado no se obtuvo una separación clara de los datos, por lo que se aplicó la transformada Fourier para analizar de otra forma los datos con el PCA. La transformada de Fourier [2] analiza los componentes de frecuencia en una señal bidimensional, como el sonido o la onda de radio.

Toma datos bidimensionales como entrada y devuelve otros datos bidimensionales como números complejos, lo que permite encontrar variaciones en las frecuencias. En el procesamiento de imágenes se utiliza mucho pues permite encontrar variaciones de colores. Al aplicar esta técnica primeramente a nuestros datos y posteriormente PCA, obtuvimos la siguiente distribución (véase Fig. 6).

3.4. Reagrupamiento de ejemplos usando el método de mezcla de gaussianas

El reagrupamiento de ejemplos tiene como objetivo encontrar diferentes grupos dentro de los elementos en los datos. Para esto, los algoritmos encuentran estructuras en los datos para que los elementos del mismo grupo sean más similares entre sí que con el resto de los grupos.

El método de mezcla de Gaussianas [14] es un modelo probabilístico que supone que todos los puntos de datos se generan a partir de una mezcla de un número finito de distribuciones gaussianas con parámetros desconocidos. Pertenece al grupo de algoritmos de agrupación suave en los que cada punto de datos pertenecerá a cada grupo existente en el conjunto de datos, pero con diferentes niveles de pertenencia a cada grupo,

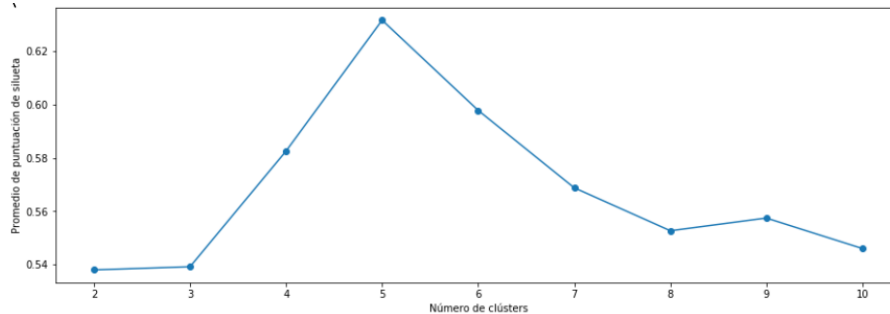


Fig. 7. Método de silueta sobre mezcla de Gaussianas.

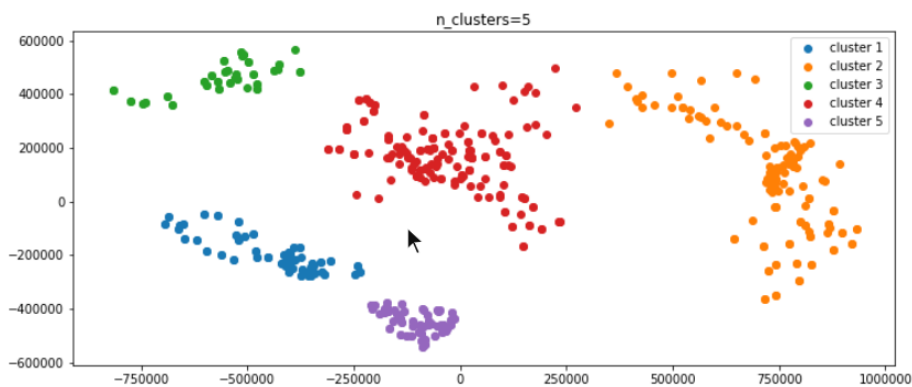


Fig. 8. Método de mezcla de Gaussianas para 5 grupos.

donde se asigna la probabilidad, que va de 0 a 1, de cada dato de pertenecer a un determinado grupo.

Para conocer el número óptimo de grupos a formar tras aplicar la técnica de mezcla de gaussianas, se utilizó el método de validación de silueta [15]. Este método trabaja sobre la distancia media entre una muestra y todos los demás puntos en el mismo grupo, además de la distancia media entre una muestra y todos los demás puntos en el siguiente grupo más cercano. El método de silueta permite conocer cuán compactos y separados se encuentran los grupos, por lo que mientras más se acerque al puntaje uno, mayor es la agrupación (véase Fig. 7).

La gráfica nos permite observar cómo para 5 grupos podemos establecer que es el número óptimo a formar durante la agrupación usando la mezcla de Gaussianas. A continuación, se muestra el resultado obtenido (véase Fig. 8).

3.5. Matriz de relación entre grupos formados y clasificación de expertos

Una vez realizado el reagrupamiento de los datos y con los resultados obtenidos por parte de la clasificación previa de los expertos, se realizó una matriz de relación entre ambos para analizar los resultados, véase Tabla 1.

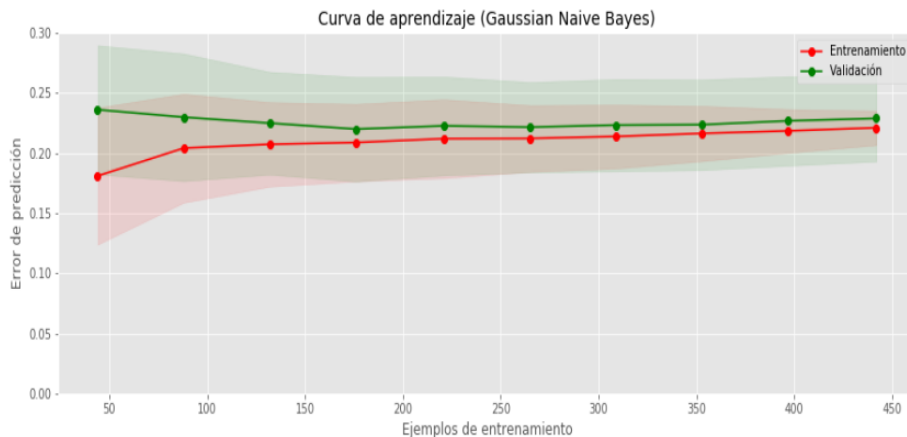


Fig. 10. Curva de aprendizaje para el algoritmo Gaussian Naive Bayes.

Tabla 1. Matriz de relación entre GruposFormados/ClasificaciónExpertos.

GruposFormados/ClasificaciónExpertos	1	2	3
1	100	0	0
2	0	48	80
3	0	0	60
4	0	93	72
5	100	0	0

Como se puede observar en la imagen, la clase 1 perteneciente a las burbujas pequeñas se pueden identificar perfectamente con los grupos 1 y 5 de los grupos formados por la agrupación. Para identificar las demás clases no es suficiente con el análisis realizado hasta el momento por lo que se puede observar, por tanto, se aplicaron métodos de aprendizaje automático para resolver este problema.

4. Métodos de aprendizaje

Se muestra a continuación el resultado del uso de los métodos de aprendizaje, donde la aplicación de la metodología a los modelos datos para clasificación de imágenes se ve reflejada.

4.1. Gaussian naive Bayes

El algoritmo Naive Bayes es uno de los algoritmos más antiguos de aprendizaje automático, que se basa en el teorema de Bayes. La teoría de Bayes y los fundamentos de las estadísticas en la que se basa este algoritmo se desarrollaron en el siglo XVIII. Antes de que apareciera la primera implementación de este algoritmo por computadora, todos los cálculos se hacían manualmente.

El Gaussian Naive Bayes es un modelo clasificador basado en Naive Bayes pero haciendo una suposición de distribución normal de las verosimilitudes [9].

Se muestra a continuación los resultados arrojados por el modelo Gaussian Naive Bayes, se eligió porque es el más simple y el más popular (véase Fig. 10).

4.2. Regresión logística

Uno de los algoritmos más utilizados actualmente en el aprendizaje automático es el de regresión logística [4]. Por su eficacia y simplicidad es muy utilizada por científicos de datos, pues no es necesario disponer tanto en entrenamiento como en ejecución de grandes recursos computacionales.

Dado el propósito del presente trabajo sobre la clasificación de imágenes de burbujas, se procedió hacer uso de este algoritmo de regresión logística para analizar su rendimiento en este tipo de problema. En la siguiente imagen se muestra su desempeño (véase Fig. 11).

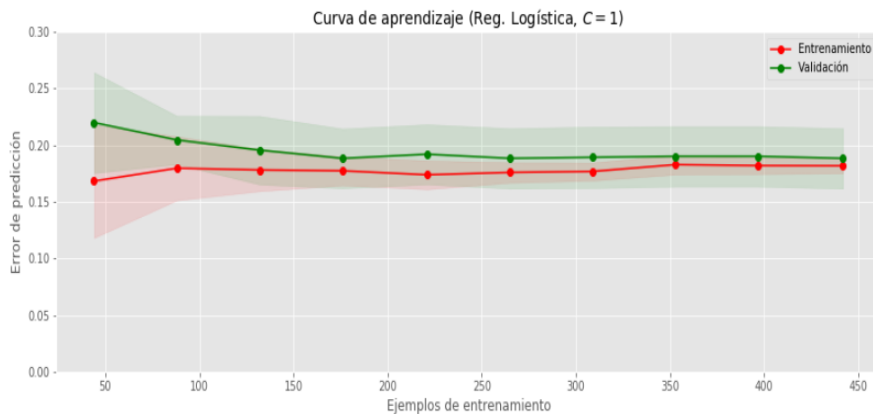


Fig. 11. Curva de aprendizaje para el algoritmo de Regresión Logística.

4.3. Máquina de vectores de soporte con kernel gaussiano

Las máquinas de vectores de soporte (Support Vector Machine, SVM por sus siglas en inglés) constituyen algoritmos de aprendizaje automático muy utilizados. SVM fue desarrollado en los años 90 [3] por Vladimir Vapnik y su equipo de trabajo. Su objetivo se centra en la separación de clases mediante un hiperplano en un espacio extendido donde maximiza el margen de clasificación, por lo que en el espacio extendido la separación entre clases es lineal mientras que no es lineal en el espacio original. Su aplicación actual se refleja en el reconocimiento de imágenes y textos, aplicaciones médicas, y muchos más; y son utilizadas tanto en problemas de clasificación como de regresión.

Para trabajar con SVM hay que tener en cuenta el kernel a utilizar, sus hiperparámetros y el parámetro de regularización. Los kernel más utilizados son el lineal, polinomial y gaussiano, donde cada uno sigue una aproximación distinta en la

que se realiza una expansión de la dimensionalidad. El ajuste de una SVM con kernel gaussiano se ve determinado esencialmente por el parámetro γ (Gamma) y el parámetro de regularización C. El parámetro γ es muy importante para desarrollar una SVM con buena generalización ya que el mismo determina el ancho del núcleo.

Si γ es demasiado grande la SVM va tender al sobreajuste y si es pequeño habrá mayor solape entre gaussianas, y el modelo será muy pobre. El parámetro de regularización C se refiere a la penalización y establece una relación entre el error de entrenamiento y la complejidad del modelo; permite la flexibilidad de que se puedan cometer errores a la hora de clasificar ejemplos con la SVM. Si mayor es el valor de C, la penalización de errores es más rígida por lo que tiende al sobreajuste. Si es C es menor, permite mayor error en el entrenamiento por lo que tiende al subajuste.

En esta investigación se trabajó con el kernel gaussiano por sus buenas prestaciones, brinda una expansión de la dimensionalidad más alta y es el método núcleo estándar para clasificación. El primer resultado de la SVM con valores estándares mostró el siguiente comportamiento (véase Fig. 12).

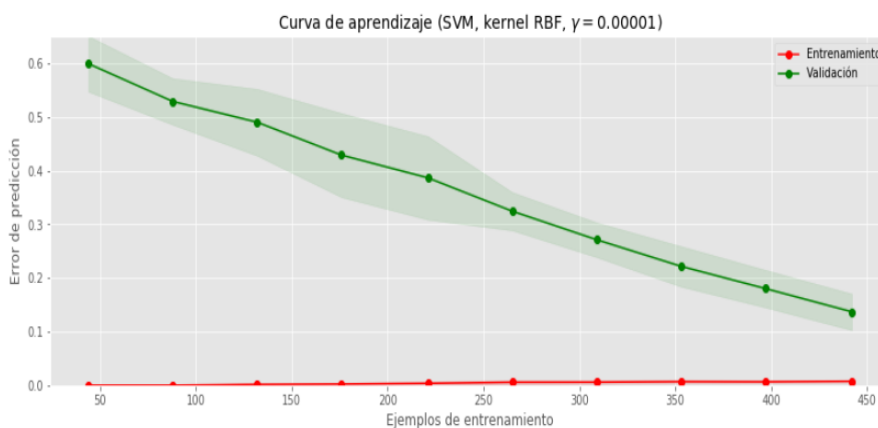


Fig. 12. Curva de aprendizaje para el algoritmo de Máquina de Soporte Vectorial con núcleo Gaussiano.

Se observa en la figura 12 como el error de validación no converge como el error de entrenamiento. Esto se debe por las siguientes cuestiones fundamentales: primero tenemos pocos datos para entrenar y validar nuestro modelo, problema que se detectó desde un inicio en la colección de datos, y segundo no están optimizados nuestros parámetros. A continuación, se trata de optimizar los parámetros γ y C para resolver el problema anterior planteado.

Curvas de validación para los parámetros γ y C

Como se observa en la figura 12, la SVM con núcleo gaussiano muestra mejores resultados que las anteriores técnicas aplicadas. Posteriormente se trabajó en la optimización de los parámetros γ y C para mejorar el comportamiento del modelo.

Los valores óptimos de estos parámetros se pueden determinar por validación cruzada. Los rangos de valores que se exploran se muestran a continuación (véase Fig. 13 y Fig. 14).

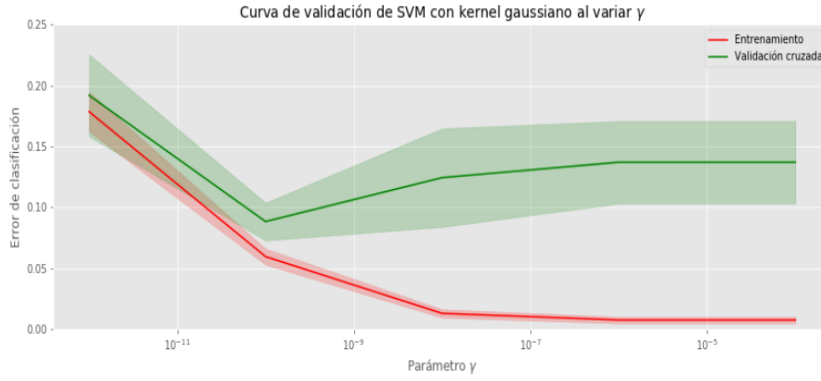


Fig. 13. Curva de validación para el parámetro γ .

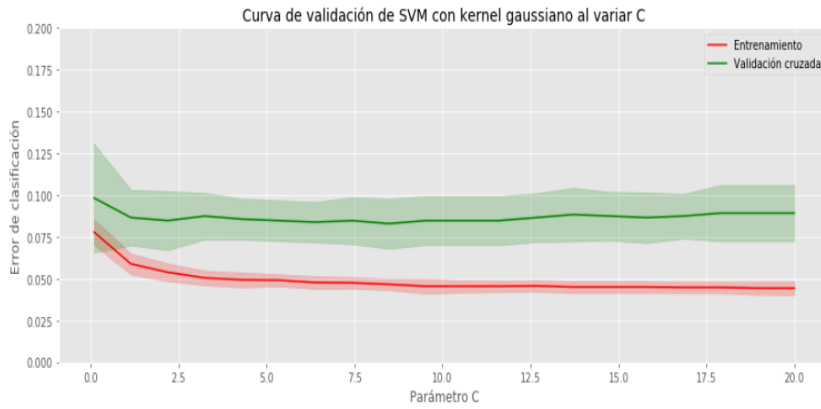


Fig. 14. Curva de validación para el parámetro C.

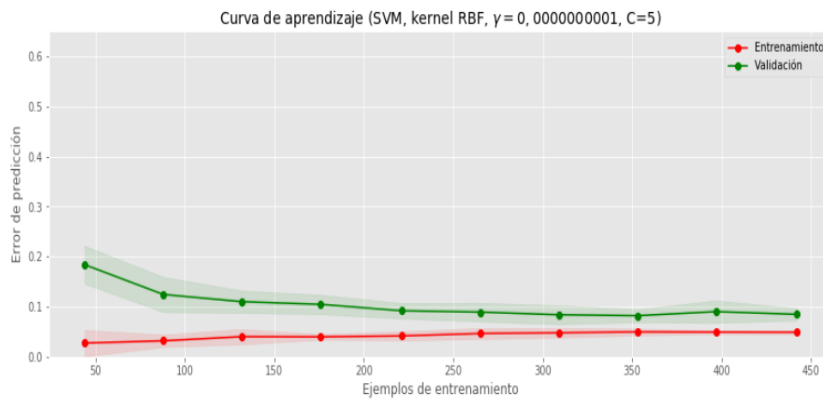


Fig. 15. Curva de aprendizaje para el algoritmo de Máquina de Soporte Vectorial con núcleo Gaussiano y parámetros óptimos.

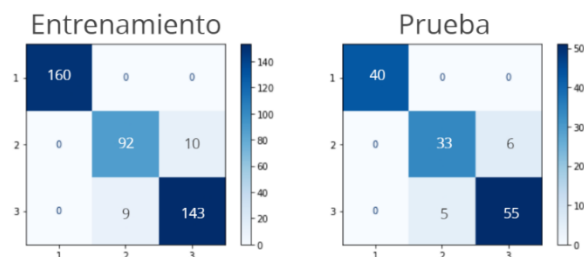


Fig. 16. Matriz de confusión al aplicar SVM con núcleo gaussiano

Tabla 2. Precisión de clasificación de modelos en conjuntos de entrenamiento y validación.

Modelo	Parámetros	Entrena- miento	Valida- ción
Gaussian Naive Bayes	priors=[0.1, 0.1, 0.1], var_smoothing=1e-9	78%	77%
Regresión Logística	penalty=l2, C=1, multi_class=auto	83%	82%
SVM - Gaussiano	C=1, kernel=rbf, gamma=scale	99%	88%
SVM - Gaussiano Opti- mizado	C=5, kernel=rbf, gamma=1e-5	95%	92%

4.4. Máquina de soporte vectorial con núcleo Gaussiano y parámetros óptimos

El rango de valores óptimos para γ se encuentran entre 10^{-11} y 10^{-9} , por lo que se toma el valor 10^{-10} como el óptimo.

Para C los valores se encuentran en el rango de 3 hasta 10 y en este caso se tomó el valor 5 como el óptimo. En la figura siguiente se muestran los resultados de nuestro modelo optimizado (véase Fig. 15).

5. Resultados

Los resultados de los modelos en los conjuntos de datos de imágenes de entrenamiento y validación se resumen en la Tabla 2.

Como se puede observar en la Tabla 2, las precisiones de los modelos Gaussian Naive Bayes y Regresión Logística no son buenas tanto para entrenamiento como para validación. El modelo de SVM con núcleo gaussiano logró resultados mucho mejores de aproximadamente 99% para entrenamiento y 88% para el conjunto de validación lo que indica que tenemos un problema de sobreaprendizaje. Se obtuvieron mejoras significativas cuando se optimizaron los parámetros para la SVM con núcleo gaussiano, lo que resultó en precisiones de clasificación de aproximadamente 95% y 92% para los conjuntos de entrenamiento y validación respectivamente. Para obtener estos resultados se hace uso de validación cruzada con el 20 por ciento de datos para validación.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por clases de la SVM con núcleo gaussiano en la matriz de confusión (véase Fig. 16).

6. Conclusiones

En esta investigación, se explora el uso de técnicas de aprendizaje automático tanto para el procesamiento como análisis de datos de imágenes. Se trabajó con los modelos de aprendizaje, Gaussian Naive Bayes, Regresión Logística y Máquinas de Soporte Vectorial, para el desarrollo de la clasificación de imágenes en las celdas de flotación.

Con los resultados de este estudio podemos concluir como un análisis detallado y una exploración sobre los datos resulta de gran relevancia para comprensión de este tipo de problemáticas. La implementación de modelos para extraer características de las imágenes de burbujas para clasificar las mismas, resulta en una mejora significativa sobre la toma de decisiones en proceso industrial minero.

De acuerdo con estos resultados preliminares se puede afirmar que el uso de ML puede ser aplicado de manera efectiva para el control y supervisión de procesos de flotación. En trabajos siguientes se pretende hacer uso de aprendizaje profundo para analizar los resultados.

Actualmente el grupo de trabajo se encuentra en el proceso de recolección de imágenes de diferentes celdas de flotación con fines de validación de estos resultados. El etiquetado de datos de entrenamiento, validación y prueba en diferentes plantas impone un desafío.

Referencias

1. Bourke, P.: Histogram Matching. <http://paulbourke.net/miscellaneous/equalisation/> (2006)
2. Cooley, J.W., Tukey, J.W.: An Algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.* 19, pp. 297–301 (1965)
3. Cortes, C., Vapnik, V.: Support-vector networks. *Mach. Learn.* 20, 3, pp. 273–297 (1995)
4. Hosmer, D.W., Lemeshow, S., Rodney, X.: *Sturdivant Applied logistic regression*. Wiley (2000)
5. Kaartinen, J., Hätönen, J., Hyötyniemi, H., Miettunen, J.: Machine-vision-based control of zinc flotation-A case study. *Control Eng. Pract.* 14(12), pp. 1455–1466 (2006)
6. Lina, B., Recke, B., Knudsen, J.K.H., Bay, S.J.: Bubble size estimation for flotation processes. *Miner. Eng.* 21(7), pp. 539–548 (2008)
7. Liua, J.J., MacGregor, J.F., Duchesne, C., Bartolaccic, G.: Flotation froth monitoring using multiresolutional multivariate image analysis. *Miner. Eng.* 18(1), pp. 65–76 (2005)
8. Liu, J.J., MacGregor, J.F.: Froth-based modeling and control of flotation processes. *Miner. Eng.* 21(9), pp. 642–651 (2008)
9. Lowd, D., Domingos, P.: Naive bayes models for probability estimation. In: *Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning*, pp. 529–536 Association for Computing Machinery (2005)
10. Mathe, Z.T., Harris, M.C., O'Connor, C.T., Franzidis, J.P.: Review of froth modelling in steady state flotation systems. *Miner. Eng.* 11(5), pp. 397–421 (1998)
11. McKee, D.J.: Automatic flotation control – a review of 20 years of effort. *Miner. Eng.*, 4(7–11), pp. 653–666 (1991)
12. Mehrshad, N., Massinaei, M.: New image-processing algorithm for measurement of bubble size distribution from flotation froth images. *Miner. Met. Process.* 28(3), pp. 146–150 (2011)

13. Morar, S.H. et al.: The use of machine vision to predict flotation performance. *Miner. Eng.*, pp. 36–38 (2012)
14. Reynolds, D.A.: Gaussian Mixture Models. In: *Encyclopedia of Biometrics* (2009)
15. Rousseeuw, P.J.: Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *J. Comput. Appl. Math.*, 20, pp. 53–65 (1987)
16. Secretaría de Economía: Minería. <https://www.gob.mx/se/acciones-y-programas/mineria> (2020)
17. SGM: Panorama minero del estado de Sonora. *Panor. Min. los Estados*, pp. 1–64 (2018)
18. Tipping, M.E., Bishop, C.M.: Probabilistic Principal Component Analysis. *J. R. Stat. Soc. Ser. B, Statistical Methodol.*, 61(3), pp. 611–622 (1999)
19. Wang, W., Bergholm, F., Yang, B.: Froth delineation based on image classification. *Miner. Eng.*, 16(11), pp. 1183–1192 (2003)
20. Yang, C., Xux, C., Mu, X., Zhou, K.: Bubble size estimation using interfacial morphological information for mineral flotation process monitoring. *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 19(3), pp. 694–699 (2009)